Bull. London Math. Soc. 36 (2004) 88–94
DOI: 10.1112/S002460930300256X

SPECTRE DU LAPLACIEN DE HODGE–DE RHAM: ESTIMÉES SUR LES VARIÉTÉS CONVEXES

PIERRE GUERINI

Résumé

Cet article présente des minorations universelles de la première valeur propre non nulle du laplacien des formes différentielles sur les domaines euclidiens ou hémisphériques convexes ou les hypersurfaces euclidiennes convexes.

Abstract

This article presents universal lower bounds for the first non-zero eigenvalue of the Laplacian of differential forms on Euclidean domains, domains of the hemisphere and convex Euclidean hypersurfaces.

1. *Introduction et énoncés des résultats.*

Dans cet article, nous appelerons *domaine* de $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ tout ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^n$ dont le bord est lisse. Les domaines euclidiens convexes (c'est-à-dire dont les courbures principales du bord sont positives) et les hypersurfaces euclidiennes compactes convexes (dont la métrique est héritée de celle de l'espace euclidien ambiant et également à courbures principales positives) ne peuvent pas posséder de petites valeurs propres non nulles pour le laplacien sur les fonctions si leur diamètre n'est pas grand. Cela découle en effet, pour les domaines, du théorème suivant.

Théorème 1.1. *Soit $n \geqslant 2$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine convexe. Alors:*

$$\mu_{1,0}(\Omega) \geqslant \frac{\pi^2}{\mathrm{d}(\Omega)^2}$$

et

$$\lambda_{1,0}(\Omega) \geqslant \frac{\lambda_{1,0}(B^1)}{\mathrm{d}(\Omega)^2},$$

où $\mu_{1,0}(\Omega)$ désigne la première valeur propre non nulle du laplacien sur les fonctions de Ω qui satisfont les conditions de bord de Neumann, $\lambda_{1,0}(\Omega)$ désigne la première valeur propre du laplacien sur les fonctions de Ω qui satisfont les conditions de bord de Dirichlet, B^1 est la boule unité dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathrm{d}(\Omega)$ est le diamètre de Ω.

La première inégalité est due à Payne et Weinberger (voir [**8**]); la seconde est une conséquence directe de la propriété de monotonie (voir [**1**]) pour les conditions de bord de Dirichlet. Notons que ces deux inégalités sont optimales.

Pour les hypersurfaces, on a l'inégalité suivant également optimale.

Received 7 February 2003.

2000 *Mathematics Subject Classification* 58J50 (primary); 58J32 (secondary).

Théorème 1.2. *Soit $n \geqslant 2$ et $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ une hypersurface convexe munie de la métrique g_{eucl} héritée de $\mathbb{R}^{n+1}$. Alors:*

$$\nu_{1,0}(S, g_{\mathrm{eucl}}) \geqslant \frac{\pi^2}{\mathrm{d}(S)^2},$$

où $\nu_{1,0}(S, g_{\mathrm{eucl}})$ est la première valeur propre non nulle du laplacien sur les fonctions de S et $\mathrm{d}(S)$ désigne le diamètre de (S, g_{eucl}).

Cette propriété a été démontrée par Li et Yau dans [**7**] (avec la constante $\pi^2/2$), puis optimalisée par Yang et Zhong dans [**10**].

Nous nous proposons dans cet article de démontrer des estimées similaires dans le cadre des formes différentielles. Notons que ce cadre plus général de l'étude du laplacien permettra en particulier de redémontrer de façon très simple les théorèmes de Payne–Weinberger et de Yang–Zhong (avec toutefois des constantes non optimales).

Commençons par fixer le cadre de notre étude. Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$ ou de la sphère S^n ($n \geqslant 2$). On se donne également (M, g), une variété riemannienne compacte orientable connexe sans bord. Pour $p \in \{0, \ldots, n\}$, on considère le laplacien Δ agissant sur les p-formes différentielles lisses ω de Ω ou de M par

$$\Delta\omega := (d\delta + \delta d)\omega,$$

où d est la différentielle extérieure, $\delta := (-1)^{n(p+1)+1} \star d \star$ est la codifférentielle, et $\star$ est l'opérateur de Hodge. Dans le cas d'un domaine Ω, on dira qu'une forme $\omega \in C^\infty\Lambda^p(\Omega)$ satisfait les conditions de bord (CB) absolues (A) si

$$i^* \star \omega = 0 \quad \text{et} \quad i^* \star d\omega = 0,$$

où i est l'inclusion $\partial\Omega \hookrightarrow \overline{\Omega}$. Ces conditions généralisent aux formes différentielles les CB de Neumann (N). L'autre problème à bord que nous considérerons est donné par les CB relatives (R) qui généralisent les CB de Dirichlet (D)

$$i^*\omega = 0 \quad \text{et} \quad i^*\delta\omega = 0.$$

Rappelons que si ω est une p-forme différentielle lisse sur Ω ou M, alors ω se décompose en une somme

$$\omega = h + \alpha + \beta$$

où h est une p-forme harmonique, α est exacte et β est coexacte. De plus, dans le cas des domaines, si ω satisfait les CB(A), alors il en est de même de h, α et β. On note $(\mu_{k,p}(\Omega))_{k\in\mathbb{N}^\star}$ (respectivement $(\lambda_{k,p}(\Omega))_{k\in\mathbb{N}^\star}$) la suite croissante des valeurs propres non nulles du laplacien agissant sur les p-formes différentielles sur Ω avec les CB(A) (respectivement (R)). L'opérateur de Hodge commute avec le laplacien et échange les CB(A) et (R). Par conséquent:

$$\lambda_{k,n-p}(\Omega) = \mu_{k,p}(\Omega), \qquad \forall k \geqslant 1.$$

Ainsi il nous suffira de nous placer dans le cadre des CB(A).

Dans le cas compact et pour $p \in \{0, \ldots, n\}$, notons aussi $(\nu_{k,p}(M, g))_{k\in\mathbb{N}^\star}$ la suite croissante des valeurs propres non nulles du laplacien agissant sur les p-formes différentielles sur (M, g). Ici, pour tout $p \in \{0, \ldots, n\}$ et tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $\nu_{k,p}(\Omega) = \nu_{k,n-p}(\Omega)$. Ainsi, il suffit, pour connaître tout le spectre d'une variété compacte, de se limiter à $p \leqslant [n/2]$ (où $[\cdot]$ désigne la partie entière). Pour un résumé de la théorie générale du laplacien sur les formes différentielles, on se reportera à [**2**]; un exposé complet se trouve dans [**9**].

Nous montrons ici les théorèmes suivants.

Théorème 1.3. *Soit Ω un domaine convexe $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$. Pour tout $p \in \{0, \ldots, n\}$,*

$$\mu_{1,p}(\Omega) \geqslant \frac{C_1(n,p)}{\mathrm{d}(\Omega)^2},$$

où $\mathrm{d}(\Omega)$ est le diamètre de Ω et

$$C_1(n,p) = \begin{cases} \dfrac{n-1}{ne^3}, & \textit{si } p = 0, \\ \dfrac{p(n-p)}{ne^3}, & \textit{si } 1 \leqslant p \leqslant n-1, \\ \lambda_{1,0}(B^1), & \textit{si } p = n, \end{cases}$$

e étant la base du logarithme néperien.

Nous obtenons, comme corollaire de la preuve de Théorème 1.3, une estimée du spectre d'un domaine convexe d'un hémisphère.

Théorème 1.4. *Soit Ω un domaine convexe de l'hémisphère $S^n_{1/2}$ de (S^n, can) (ou (S^n, can) est la sphère de rayon 1 dans $\mathbb{R}^{n+1}$ munie de la métrique héritée de $\mathbb{R}^{n+1}$). Pour tout $p \in \{0, \ldots, n\}$,*

$$\mu_{1,p}(\Omega) \geqslant \mu_{1,p}\big(S^n_{1/2}\big).$$

Dans le cas des hypersurfaces convexes euclidiennes, nous montrons le théorème suivant.

Théorème 1.5. *Soit (S, g_{eucl}) une hypersurface convexe de $\mathbb{R}^{n+1}$ $(n \geqslant 2)$. Pour tout $p \in \{0, \ldots, [n/2]\}$,*

$$\nu_{1,p}(S, g_{\mathrm{eucl}}) \geqslant \frac{\max\{1, p\}}{2e^3} \frac{1}{\mathrm{d}(S)^2},$$

où $\mathrm{d}(S)$ est le diamètre (S, g_{eucl}).

2. *Preuves des théorèmes.*

Preuve du Théorème 1.3. Le cas de $p = n$ est une conséquence directe de la propriété de monotonie pour les fonctions (D) (voir Théorème 1.1). Soit Ω un domaine quelconque de $\mathbb{R}^n$. Si f est une fonction propre pour les CB(N) associée à $\mu_{1,0}(\Omega)$, alors df est une 1-forme propre non nulle associée à la même valeur propre, qui vérifie les CB(A). Il s'ensuit que $\mu_{1,1}(\Omega) \geqslant \mu_{1,0}(\Omega)$. Le cas $p = 0$ découle donc du cas $p = 1$.

Étudions alors le cas où $1 \leqslant p \leqslant n-1$. L'idée consiste à modifier quasi-isométriquement la métrique euclidienne de sorte que le domaine devienne un domaine convexe de la sphère. On applique alors la formule de Bochner. Soit Ω' l'image Ω par l'homothétie de rapport $1/(\mathrm{d}(\Omega)\sqrt{n})$. Pour tout $p \in \{1, \ldots, n-1\}$,

$$\mu_{1,p}(\Omega) = \frac{\mu_{1,p}(\Omega')}{\mathrm{d}(\Omega)^2\, n}. \tag{1}$$

La métrique euclidienne est, en coordonnées polaires, $g_e = dr^2 + r^2\, d\theta^2_{n-1}$.

Considérons, dans $\mathbb{R}^{n+1}$, la sphère S^n de rayon 1. On assimile $\mathbb{R}^n$ au plan $\mathcal{P}_n$ tangent à S^n, au point O' de coordonnées $(0,\dots,0,1)$. Quitte à translater Ω', on suppose que son centre de gravité est le point $(0,\dots,0,1)$. Ainsi Ω' est contenu dans la boule $B_{\mathrm{eucl}}(1/\sqrt{n})$ de centre O' et de rayon $1/\sqrt{n}$ dans $\mathcal{P}_n$.

Soit alors $\Phi_1 : \mathcal{P}_n \to S^n$, l'application qui à $x \in \mathcal{P}_n$ associe l'unique intersection de la demi-droite $[0x)$ avec la sphère S^n. On munit $\mathcal{P}_n$ des coordonnées polaires de centre O'; de même, on munit $S^n \setminus \{O''\}$ des coordonnées polaires de centre O', où O'' est le point de S^n diamétralement opposé à O'. Dans ces coordonnées, Φ_1 s'écrit

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_n \to S^n;\\ &(r,\theta) \mapsto (\arctan(r),\theta). \end{aligned}$$

Considérons la métrique

$$g_s = \frac{1}{(1+r^2)^2}\,dr^2 + \frac{r^2}{(1+r^2)}\,d\theta^2_{n-1}.$$

Il s'agit de l'image réciproque sur $\mathbb{R}^n$, par Φ_1, de la métrique sur S^n. Si $0 \leqslant r \leqslant 1/\sqrt{n}$, nous avons

$$\frac{1}{(1+1/n)^2} g_e \leqslant g_s \leqslant g_e.$$

Par [**4**, Proposition 3.3], pour tout $p \in \{1,\dots,n-1\}$, nous avons

$$\mu^e_{1,p}(\Omega') \geqslant \frac{1}{(1+1/n)^{3n}} \mu^s_{1,p}(\Omega') \tag{2}$$

où $\mu^e_{1,p}$ désigne la valeur propre du laplacien pour la métrique euclidienne, et $\mu^s_{1,p}$ désigne la valeur propre du laplacien pour la métrique sphérique.

Étudions maintenant les valeurs propres de $\mu^s_{1,p}(\Omega')$. Soit $\varphi \in C^\infty\Lambda^p(\Omega')$ une forme propre (A) associée à $\mu^s_{1,p}(\Omega')$. Par la formule de Bochner (voir [**6**]), nous avons

$$\begin{aligned} \mu^s_{1,p}(\Omega')\langle\varphi,\varphi\rangle &= \langle\Delta^s\varphi,\varphi\rangle\\ &= \tfrac{1}{2}\Delta^s|\varphi|^2 + |\nabla^s\varphi|^2 + R^s_p(\varphi,\varphi), \end{aligned}$$

où l'exposant s signifie que l'on travaille avec la métrique sphérique.

En intégrant,

$$\mu^s_{1,p}(\Omega')\|\varphi\|^2 = \int_{\Omega'} |\nabla^s\varphi|^2 + \int_{\Omega'} R^s_p(\varphi,\varphi) + \int_{\partial\Omega'} \langle\nabla^s_{N^s}\varphi,\varphi\rangle, \tag{3}$$

où N^s est le champ de vecteurs normaux sortants unitaires (pour g_s) à $\partial\Omega'$.

Ces trois dernières intégrales ont les propriétés suivantes.

(i) Le terme $\int_{\Omega'} |\nabla^s\varphi|^2$ est positif.

(ii) Comme on travaille sur la sphère unité, par [**5**, Corollaire 2.6], le tenseur R^s_p est minoré par $p(n-p)$. Donc $\int_{\Omega'} R^s_p(\varphi,\varphi) \geqslant p(n-p)\,\|\varphi\|^2$.

(iii) La projection Φ_1 est par construction totalement géodésique. Comme le diamètre pour la métrique g_e du domaine convexe Ω' est plus petit que 1, il s'ensuit que la géodésique minimale pour la métrique g_s qui relie deux points quelconques de Ω' est contenue dans Ω'. Ainsi les courbures principales de $\partial\Omega'$ pour la métrique g_s sont positives. Il vient alors $\int_{\partial\Omega'}\langle\nabla^s_N\varphi,\varphi\rangle \geqslant 0$.

On déduit alors de (3) que

$$\mu^s_{1,p}(\Omega') \geqslant p(n-p). \tag{4}$$

En combinant (1), (2) et (4), on a le résultat, sachant que la suite $((1+1/n)^n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ est croissante et tend vers e. □

Preuve du Théorème 1.4. Le cas $p = n$ découle de la propriété de monotonie dans le cas des domaines sphériques.

Le cas $p = 0$ sera une conséquence immédiate du cas $p = 1$.

Soit donc, pour $1 \leqslant p \leqslant n-1$, une p-forme propre ψ sur Ω associée à la valeur propre $\mu_{1,p}(\Omega)$. Par la formule de Bochner,

$$\mu_{1,p}(\Omega)\,\|\psi\|^2 \geqslant \int_\Omega |\nabla\psi|^2 + p(n-p)\,\|\psi\|^2. \tag{5}$$

Mais par [**5**, Lemme 6.8] nous avons

$$\int_\Omega |\nabla\psi|^2 \geqslant \frac{1}{p+1}\int_\Omega |d\psi|^2 + \frac{1}{n-p+1}\int_\Omega |\delta\psi|^2. \tag{6}$$

Ainsi, d'après les inégalités (5) et (6),

– si ψ peut être choisie coexacte, $\mu_{1,p}(\Omega) \geqslant (p+1)(n-p)$;

– sinon $\mu_{1,p}(\Omega) \geqslant (n-p+1)p$.

Mais on déduit aisément de [**5**, Section 11] que

$$(p+1)(n-p) = \bar{\mu}_{1,p}\big(S^n_{1/2}\big),$$

où $\bar{\mu}_{1,p}(S^n_{1/2})$ est la première valeur propre pour les p-formes *coexactes* sur $S^n_{1/2}$, qui vérifient les CB(A). De même,

$$(n-p+1)p = \widetilde{\mu}_{1,p}\big(S^n_{1/2}\big),$$

où $\widetilde{\mu}_{1,p}(S^n_{1/2})$ est la première valeur propre pour les p-formes *exactes* sur $S^n_{1/2}$, qui vérifient les CB(A), d'où le résultat. □

Remarque 2.1. Il est probable que l'inégalité du Théorême 1.4 soit une égalité si et seulement si $\Omega = S^n_{1/2}$ (cela est connu si $p = n$: c'est la propriété de monotonie pour les domaines sphériques). Mais cela demande de comprendre plus en détails comment se comporte une forme propre notamment au bord des domaines.

Preuve du Théorème 1.5. Comme dans la preuve de Théorème 1.3, on prend S', l'image de S par l'homothétie de rapport $1/(\mathrm{d}(S)\sqrt{n})$. On considère également sur $\mathbb{R}^{n+1}$, les métriques g_e et g_s. Comme on l'a vu dans la preuve de Théorème 1.3, S' est encore convexe relativement à la métrique sphérique.

Lemme 2.2. *Le tenseur de courbure R^s de S' par rapport à la métrique g_s est minoré par* 1.

Si $\varphi \in C^\infty\Lambda^p(S')$ est une forme propre sur S' associée à la valeur propre $\nu^s_{1,p}(S')$, la formule de Bochner donne, après integration,

$$\nu^s_{1,p}(S')\|\varphi\|^2 \geqslant \int_{S'} R^s_p(\varphi,\varphi).$$

Par le Lemme 2.2 et [**5**, Corollaire 2.6], le tenseur R^s_p est minoré par $p(n-p)$. Donc $\nu^s_{1,p}(S')$ est minorée par $p(n-p)$, lorsque $p \in \{1,\dots,n-1\}$, ce qui donne le résultat, comme pour le Théorème 1.3, sur $\nu_{1,p}(S)$. □

Preuve du Lemme 2.2. Il faut montrer que pour tout $\xi \in S'$ et tout $v \in \bigwedge^2 T_\xi S'$, $\rho^s_\xi(v) \geqslant \|v\|^2$, où ρ^s_ξ est définie par $\rho^s_\xi(x \wedge y) = R^s_\xi(x,y,x,y)$ et où $\bigwedge^2 T_\xi S'$ est équipé du produit scalaire hérité de la métrique sur $T_\xi S' \hookrightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, g_s)$.

Mais si $\widetilde{R}$ est le tenseur de courbure de (S^n, can) et l^s, la seconde forme fondamentale de S' plongé dans $(\mathbb{R}^{n+1}, g_s)$, nous avons, d'après [**6**, Théorème 5.5], pour tous $x,y,z,t \in T_\xi S'$,

$$R^s_\xi(x,y,z,t) = \widetilde{R}^s_\xi(x,y,z,t) + l^s_\xi(x,z) l^s_\xi(y,t) - l^s_\xi(x,t) l^s_\xi(y,z).$$

Soit $\{\lambda^s_1, \dots, \lambda^s_n\}$ les courbures principales au point ξ de S' et $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthonormale de $T_\xi S'$ qui diagonalise l^s_ξ.

Pour tout

$$v = \sum_{i<j} v_{ij}\, e_i \wedge e_j \in \bigwedge^2 T_\xi S',$$

on a

$$\begin{aligned}\rho_\xi(v,v) &= \widetilde{\rho}_\xi(v,v) + \sum_{i<j} v_{ij}^2 \lambda^s_i\, \lambda^s_j \\ &\geqslant \widetilde{\rho}_\xi(v,v), \quad \text{par convexité de } S'.\end{aligned}$$

Comme les valeurs propres de $\widetilde{\rho}$ valent toutes 1 ; cela donne le résultat. □

3. *Quelques remarques.*

Notons que l'on ne peut pas affaiblir les hypothèses du le Théorème 1.3 en imposant uniquement une normalisation du volume. En effet, un entier $K \geqslant 1$ étant donné, il n'est pas difficile de construire des domaines convexes de volume 1 et possédant une petite valeur propre pour les CB(A), pour tout $p \leqslant n-1$. Il suffit pour cela de considérer le produit d'une boule de dimension $n-1$ et de grand diamètre avec un petit intervalle (que l'on lisse, afin d'obtenir un domaine). Cet exemple, qui permet d'obtenir autant de petites valeurs propres que l'on veut, montre aussi qu'aucune valeur propre d'un domaine convexe ne peut être contrôlée indépendamment du diamètre.

L'exemple des sphères de Berger (voir [**3**]) montre qu'une seule hypothèse sur la positivité de la courbure sectionnelle des sphères riemanniennes de diamètre uniformément borné ne suffit pas pour obtenir une estimée du type 1.5. D'un autre côté, on retrouve par ce théorème que les métriques des sphères de Berger ne sont pas en général isométriquement plongeables comme hypersurfaces euclidiennes.

Le Théorème 1.3 montre que pour tout p et tout domaine convexe Ω, le produit $\mu_{1,p}(\Omega) \cdot \mathrm{diam}^2(\Omega)$ est minoré par une constante universelle strictement positive. Mais ces estimées ne sont probablement pas optimales géométriquement. En fait, nous présentons la conjecture suivante.

CONJECTURE 3.1. Soit Ω_n une suite décroissante pour l'inclusion de domaines convexes qui converge (pour la topologie de Hausdorff) vers un convexe Ω_∞ non réduit à un point. Soit $p_0 \neq 0$, la dimension de Ω_∞. Alors:

(i) si $p \leqslant p_0$, alors $\limsup_{n \to +\infty} \mu_{1,p}(\Omega_n) < +\infty$;
(ii) si $p > p_0$, alors $\lim_{n \to +\infty} \mu_{1,p}(\Omega_n) = +\infty$.

On peut naturellement donner une conjecture similaire pour les hypersurfaces convexes.

References

1. P. Bérard, *Spectral geometry: direct and inverse problem*, Lecture Notes in Math. 1207 (Springer, Berlin, 1986).
2. J. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian geometry*, with a chapter by Burton Randol, and with an appendix by Jozef Dodziuk (Academic Press, Orlando, 1984).
3. B. Colbois and G. Courtois, 'A note on first non zero eigenvalues of the Laplacian acting on p-forms', *Manuscripta Math.* 68 (1990) 143–160.
4. J. Dodziuk, 'Eigenvalues of the Laplacian on forms', *Proc. Amer. Math. Soc.* 85 (1982) 437–443.
5. S. Gallot and D. Meyer, 'Opérateur de courbure et Laplacien des formes différentielles d'une variété Riemannienne', *J. Math. Pur. Appl.* (9) 54 (1975) 259–284.
6. S. Gallot, D. Hulin and J. Lafontaine, *Riemannian geometry*, 2nd edn (Springer, Berlin, 1993).
7. P. Li and S-T. Yau, 'Estimates of eigenvalues of a compact Riemannian manifold.', *Proc. Symp. Pure Math.* 36 (1980) 205–239.
8. L. Payne and H. Weinberger, 'Lower bounds for vibration frequencies of elastically supported membranes and plates', *J. Soc. Ind. Appl. Math.* 5 (1957) 171–182.
9. M. E. Taylor, *Partial differential equations I* (Springer, Berlin, 1991).
10. H. C. Yang and J. Q. Yong, 'On the estimate of the first eigenvalue of a compact Riemannian manifold', *Sci. Sin.* (A) 27 (1984) 1265–1273.

Pierre Guerini
Institut für Mathematik
Universität Zürich Irchel
Winterthurerstrasse 90
CH-8057 Zürich
Switzerland

pguerini@math.unizh.ch